Die

Schaar ähnlicher Kegelschnitte

welche einem Dreiecke umschrieben sind

synthetisch behandelt.

INAUGURAL-DISSERTATION

der philosophischen Facultät

der

UNIVERSITÄT ROSTOCK

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

ANDREAS SCHAEFFER

aus Strassburg.

BUCHSWEILER

Buchdruckerei E. Weinhard.

1891.

Die

Schaar ähnlicher Kegelschnitte

welche einem Dreiecke umschrieben sind

synthetisch behandelt.

INAUGURAL-DISSERTATION

der philosophischen Facultät

der

UNIVERSITÄT ROSTOCK

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

ANDREAS SCHAEFFER

aus Strassburg.

BUCHSWEILER

Buchdruckerei E. Weinhard.

1891.

Referent: Prof. Dr. STAUDE.

Auf die Schaar ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind, hat schon im Jahre 1832 Jakob Steiner aufmerksam gemacht in seiner „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander", Anhang Nr. 39. Mehrere der unten abgeleiteten Sätze sind daselbst von ihm angegeben, jedoch sämmtlich ohne Beweis.

Es dürfte auffallend erscheinen, dass zur Zeit weder eine analytische, noch eine synthetische Bearbeitung dieses Gegenstandes vorliegt, besonders in Anbetracht des grossen Interesses, welches man neuerdings der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades geschenkt hat; denn die letztere giebt ein vortreffliches synthetisches Hülfsmittel für ähnliche Untersuchungen an die Hand.

Gegenwärtig wird die genannte Verwandtschaft vielfach auf das Sehnensystem der Raumcurve dritter Ordnung basirt; nach dem Vorgange Steiner's soll jedoch der für die folgende Untersuchung zu benutzende specielle Fall derselben vermittelst des einschaligen Hyperboloids begründet werden.

§ 1.

Definition der Schaar ähnlicher Kegelschnitte.

Zieht man durch einen Punkt P im Innern eines Kreises (Fig. 1) zwei Sehnen AC, BD, so sind die Rechtecke aus den Segmenten dieser Sehnen einander gleich, also:

$$PA \,.\, PC = PB \,.\, PD.$$

Seien die Strecken AC und DB zugleich auch Sehnen eines Kegelschnitts, so gilt von ihnen der Satz, dass das Verhältniss der Rechtecke $PA \,.\, PC$ und $PB \,.\, PD$ für jede Lage des Punktes P dasselbe bleibt, wenn die Richtungen der Sehnen AC und BD unverändert bleiben.[1]) Fällt P mit dem Mittelpunkte M des Kegelschnitts zusammen, so wird $MA_1 = MC_1$ und $MB_1 = MD_1$, woraus folgt:

$$\frac{(MA_1)^2}{(MB_1)^2} = \frac{PA \,.\, PC}{PB \,.\, PD}$$

oder wegen der Gleichung

$$PA \,.\, PC = PB \,.\, PD$$

ist: $MA_1 = MB_1$ oder $A_1 C_1 = B_1 D_1$, d. h. die beiden zu den Sehnen AC und BD parallelen Durchmesser des Kegelschnitts sind einander gleich und liegen daher symmetrisch zu den Axen desselben. Es folgt, dass die Durchschnittssehnen eines Kreises und eines Kegelschnitts gleiche Winkel mit den Axen des letzteren bilden.[2])

[1]) Apollonius, Conica III, 16 ff.

[2]) Vgl. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearbeitet von Dr. W. Fiedler, 4. Aufl. Art. 172.

Seien die 4 Kreispunkte *A, B, C* und *D* die *Basispunkte* eines *Kegelschnittbüschels*, dann gilt dieser Satz für jeden Kegelschnitt des Büschels, d. h. *die Axen aller dieser Kegelschnitte sind gleichgerichtet.* Will man irgend einen von diesen Kegelschnitten konstruiren, dessen Axe in einer gegebenen Richtung liegt, so erhält man jedesmal zwei Lösungen, indem jede der beiden Axen des gesuchten Kegelschnitts in der gegebenen Richtung liegen kann. *Der Büschel besteht* daher *aus zwei Hälften;* in jeder derselben kommen Kegelschnitte aller möglichen Gattungen vor, von der Excentricität Null des Kreises bis zur Excentricität *e* derjenigen Hyperbel, welche von der gleichseitigen am meisten abweicht. Jede Gestalt des Kegelschnitts, dessen Excentricität zwischen Null und *e* liegt, ist ein einziges Mal in jeder Hälfte des Büschels vorhanden, d. h. *die Kegelschnitte des Büschels sind paarweise ähnlich,* da man unter ähnlichen Kegelschnitten solche versteht, welche die gleiche numerische Excentricität haben; die entsprechenden Axen eines jeden ähnlichen Kegelschnittpaares stehen auf einander senkrecht.

Es folgt hieraus unmittelbar, dass im Büschel sich *zwei Parabeln* befinden, welche die Ellipsen von den Hyperbeln trennen, ferner dass die beiden gleichseitigen Hyperbeln des Büschels zusammenfallen, und dass der Kreis ebenfalls zum Büschel gehört, sowie die drei Seitenpaare des vollständigen Vierseits *A B C D.*

Wenn also die vier Basispunkte eines Kegelschnittbüschels ein Kreisviereck bilden, so zerfallen die Kegelschnitte des Büschels in eine Gruppe von Ellipsenpaaren, die einander ähnlich sind, eine Gruppe von ähnlichen

Hyperbelpaaren und nur ein Parabelpaar, welches den Uebergang zwischen den beiden Gruppen bildet; unter den Hyperbeln kommt nur eine einzige gleichseitige und drei Linienpaare vor, die Verbindungslinien der Basispunkte des Büschels, zu welchem auch der dem Vierecke umschriebene Kreis gehört.

Die Axen aller Kegelschnitte des Büschels liegen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen, welche bestimmt sind durch die Winkelhalbirenden eines jeden der drei Seitenpaare des Vierecks.

Umgekehrt können einem jeden Kreisvierecke zwei ähnliche Kegelschnitte von einer bestimmten Gattung umschrieben werden, deren gleichnamige Axen aufeinander senkrecht stehen, etc.

Nimmt man drei der Basispunkte als fest und den vierten auf dem Kreise beweglich an, so erhält man für jede Lage des beweglichen Punktes alle möglichen Gattungen des Kegelschnitts, vom Kreise an bis zu derjenigen Hyperbel, welche von der gleichseitigen am meisten abweicht.

Hält man daher eine bestimmte Excentricität fest, so gehen durch jeden auf dem Kreise beweglichen vierten Basispunkt zwei Kegelschnitte von dieser Excentricität, d. h. wenn der bewegliche Punkt den Kreis durchläuft, so erhält man die Gesammtheit aller Kegelschnitte von derselben Excentricität, welche dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben werden können.

Denkt man sich also um ein gegebenes Dreieck eine Schaar, d. h. alle möglichen ähnlichen Kegelschnitte von irgend einer bestimmten Gattung umschrieben, so wird

der dem Dreiecke umschriebene Kreis in jedem Punkte von zwei der genannten Kegelschnitte geschnitten; die gleichnamigen Axen der letzteren stehen jedesmal auf einander senkrecht.

Fällt der Punkt D mit einem der Eckpunkte des Dreiecks $A\,B\,C$ zusammen, so ergiebt sich: *Unter der Schaar ähnlicher Kegelschnitte, die einem Dreiecke umschrieben sind, befinden sich drei Paar, welche den Kreis in den Eckpunkten des Dreiecks berühren und daselbst jedesmal eine gemeinschaftliche Tangente mit dem Kreise haben.*

§ 2.

Einführung der zu benutzenden quadratischen Verwandtschaft.

Um diese Schaar ähnlicher Kegelschnitte näher zu untersuchen, soll die Ebene derselben mit Hülfe des in der Einleitung erwähnten besonderen Falles der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades auf eine zweite Ebene abgebildet (projicirt) werden.

Das gegebene Dreieck sei $A\,B\,C$ in der Ebene Σ. Wir legen eine zweite Ebene Σ_1 durch einen der Eckpunkte des Dreiecks, z. B. durch A, so dass der Punkt A sich auf der Schnittlinie g der Ebenen Σ und Σ_1 befindet (Fig. 2).

Sei A_1 der Schnittpunkt der dem Punkte A gegenüberliegenden Dreiecksseite a mit der Geraden g; legt man dann durch den Punkt C eine Gerade g', welche die Ebene Σ_1 in C_1 trifft, und welche der Träger eines Ebenenbüschels ist, so schneidet der letztere die beiden Ebenen

Σ und Σ_1 in perspectivischen Strahlenbüscheln, deren entsprechende Strahlen sich auf g treffen.

Dasselbe findet statt, wenn man durch den Punkt B einen zum ersten perspectivischen Strahlen- und Ebenenbüschel so legt, dass die entsprechenden Strahlen bezw. Ebenen der beiden Büschel sich auf der Schnittlinie g von Σ und Σ_1 treffen. Die Axe g'' dieses zweiten Ebenenbüschels möge die Ebene Σ_1 im Punkte B_1 treffen, dann sind die Strahlenbüschel B in Σ und B_1 in Σ_1 projectivisch. Nimmt man B_1 auf der Verbindungslinie a_1 von A und C_1 an, dann ist a_1 ein gemeinschaftlicher Strahl der Büschel B_1 und C_1, ebenso wie a ein gemeinschaftlicher Strahl von B und C ist.

Ferner sei g die Axe eines dritten, zu g' und g'' projectivischen Ebenenbüschels. Die Geraden g' und g'' werden von dem Ebenenbüschel g in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten, welche auch projectivisch sind zu den drei Ebenenbüscheln, zu g aber perspectivisch. Umgekehrt ist g perspectivisch zu den Ebenenbüscheln g' und g'', deren Träger als nicht in einer Ebene liegend angenommen werden sollen.

Legt man einen Strahl durch zwei entsprechende Punkte der Punktreihen g' und g'', so geht dieser Strahl offenbar durch den entsprechenden Punkt der Punktreihe g, da g' und g'' perspectivisch sind mit dem Ebenenbüschel g. Gleitet nun der Strahl an den drei Geraden g, g', g'' hin, so trifft er dieselben jedesmal in ihren drei entsprechenden Punkten, wobei er eine Regelschaar beschreibt, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt; dieselbe ist i. A. ein einschaliges Hyperboloid, da man bei der ange-

nommenen Lage der Geraden g' und g'' und der Ebenen Σ und Σ_1 keine unendlich ferne Gerade erhält. Die zweite Regelschaar dieser Fläche enthält die drei Strahlen g, g' und g''.

Betrachtet man nun die beiden Ebenen Σ und Σ_1 als Schnitte des angegebenen Strahlensystems, so ergiebt sich folgende Verwandtschaft derselben.

Einem beliebigen Punkte des ebenen Systems Σ entspricht ein Punkt von Σ_1; die Punkte der Geraden g entsprechen sich selbst. Der Strahl a_1, der ganz in Σ_1 liegt, trifft Σ in A; der Punkt A von Σ entspricht folglich allen Punkten der Geraden a_1 in Σ_1. Jeder Punkt der Punktreihe g'' bestimmt mit den Punkten von g' einen ebenen Strahlenbüschel, welcher die Ebene Σ_1 in einer geraden Punktreihe schneidet; ebenso schneidet der Strahlenbüschel aus B das System Σ_1 in der geraden Punktreihe b_1, und der Punkt B entspricht folglich allen Punkten von b_1. Dasselbe gilt für den Punkt C und die Gerade c_1.

Umgekehrt entsprechen in gleicher Weise allen Punkten der Geraden a, b, c in Σ die Punkte A_1, B_1, C_1 in Σ_1. Die Dreiecke $A\ B\ C$ und $A_1\ B_1\ C_1$ sollen die Hauptdreiecke, ihre Eckpunkte die *Hauptpunkte* und ihre Seiten die *Hauptgeraden* von Σ und Σ_1 heissen.[3])

Demnach entspricht allen Punkten einer Hauptgeraden von Σ ein Hauptpunkt von Σ_1, und umgekehrt.

Sei eine Gerade k_1 in Σ_1. Lässt man einen Strahl an den Geraden k_1, g' und g'' hingleiten, so erhält man für jeden Punkt P_1 von k_1 in Σ_1 einen entsprechenden

[3]) Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, 59, II.

Punkt P in Σ; da aber der bewegliche Strahl eine Regelfläche zweiter Ordnung beschreibt, so wird die letztere von Σ in einem Kegelschnitte k geschnitten, welche die Gerade k_1 in einem Punkte K der Geraden g trifft. Da ferner k_1 jede der drei Hauptgeraden von Σ_1 in je einem Punkte trifft, welcher bezw. X_1, Y_1, Z_1 heissen möge, so muss der Kegelschnitt k durch die drei Hauptpunkte von Σ gehen. Einer beliebigen Geraden von Σ_1 entspricht daher ein Kegelschnitt, welcher dem Hauptdreiecke von Σ_1 umschrieben ist, und umgekehrt.

Geht aber die Gerade durch einen Hauptpunkt, wie z. B. die Linie $C_1 P_1$, so liegt dieselbe mit g' in einer Ebene, welche von dem beweglichen Strahle beschrieben wird; der letzere schneidet Σ in den Punkten derjenigen Geraden, in welcher Σ von der Verbindungsebene von g' und P_1 geschnitten wird. Diese Gerade ist aber die Verbindungslinie des Punktes C und des Schnittpunktes der Geraden g mit $P_1 C_1$. Es folgt, dass einer Geraden, welche durch einen der drei Hauptpunkte von Σ_1 geht, eine Gerade entspricht, welche durch den entsprechenden Hauptpunkt von Σ geht.

Die Strahlen, die nach den Punkten der unendlich fernen Geraden Q_1 von Σ_1 gehen, sind mit Σ_1 parallel und liegen folglich auf einem hyperbolischen Paraboloide, welches von Σ i. A. in einer Hyperbel Q geschnitten wird, die dem Hauptdreiecke $A\,B\,C$ umschrieben ist. Da sich Q und Q_1 auf g schneiden, so muss eine Asymptote von Q parallel zu g sein. Den unendlich entfernten Geraden R und Q_1 von Σ und Σ_1 entsprechen also i. A. in Σ_1 und Σ zwei Hyperbeln R_1 und Q, von welchen je eine

Asymptote parallel zu g ist. Ist R_1 keine Hyperbel, sondern eine Parabel, so ist es auch Q, und umgekehrt. In diesem Falle sind die Axen parallel zu g.

Einer Tangente t in einem Punkte P eines Kegelschnittes k, welcher in Σ dem Hauptdreiecke $A\,B\,C$ umschrieben ist, entspricht in Σ_1 ein Kegelschnitt t_1, welcher dem Hauptdreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ umschrieben ist und die Gerade k_1 im Punkte P_1 berührt. Denjenigen Tangenten, welche den Kegelschnitt k in den Punkten A, B, C berühren, entsprechen in Σ_1 die Geraden A_1X_1', B_1Y_1', C_1Z_1', welche die Ecken des Hauptdreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ mit den Schnittpunkten X_1', Y_1', Z_1' von k_1 mit den Hauptgeraden a_1, b_1, c_1 von Σ_1 verbinden.

Aus der Bedeutung der Kegelschnitte Q und R_1 für die Ebenen Σ und Σ_1 folgt ferner unmittelbar, dass ein Kegelschnitt k von Σ, welcher einer Geraden k_1 von Σ_1 entspricht, entweder eine Hyperbel, oder eine Parabel, oder eine Ellipse ist, je nachdem die Gerade k_1 den Kegelschnitt R_1 schneidet, oder berührt, oder gar nicht trifft.

Dem Kreise k^0 von Σ, der dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben ist, entspricht eine Gerade k_1^0 von Σ_1; beide schneiden in einem Punkte K^0 von g. Durch jeden Punkt P von k^0 gehen zwei der ähnlichen Kegelschnitte der Schaar, folglich gehen durch jeden Punkt P_1 von k_1^0 zwei Geraden, welche jenen beiden Kegelschnitten entsprechen. Wenn nun der Kegelschnitt k die Schaar beschreibt, so durchläuft P den Kreis k^0 und gleichzeitig P_1 die Gerade k_1^0, so dass die Punktreihen k^0 und k_1^0, welche ja auch Schnitte einer und derselben Regelschaar sind, projectivisch sind. Aber jeder Kegelschnitt k schneidet auch g

in einem Punkte K, so dass jedem Punkte P von k^0 ein Punkt K von g zugeordnet ist, folglich sind auch die Punktreihen k^0 und g projectivisch, daher k_1' und g ebenfalls. Nun ist der Strahl k_1 die jedesmalige Verbindungslinie der entsprechenden Punkte der geraden Punktreihen k_1' und g, folglich umhüllt derselbe einen Kegelschnitt C_1^2 in Σ_1, der i. A. nicht durch die drei Hauptpunkte A_1, B_1, C_1 geht, sondern jede der Hauptgeraden a_1, b_1, c_1 in je zwei Punkten schneidet.

Da aber ein Kegelschnitt von Σ_1 von einem dem Hauptdreiecke $A_1 B_1 C_1$ umschriebenen Kegelschnitte i. A. in vier Punkten geschnitten wird, so entspricht dem Kegelschnitte C_1^2 von Σ_1 in der Ebene Σ eine Curve C^4, welche von der Geraden, die dem dem Hauptdreiecke $A_1 B_1 C_1$ umschriebenen Kegelschnitte entspricht, ebenfalls in vier Punkten geschnitten wird. Die Curve C^4 ist daher von der vierten Ordnung.

§ 3.

Die Ecken des Dreiecks als Doppelpunkte der Curve C^4. Eigenschaften der letzteren.

Der Kegelschnitt C_1^2 schneidet jede der drei Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ i. A. in je zwei Punkten, somit ist jeder Eckpunkt des Dreiecks $A\ B\ C$ ein Doppelpunkt der Curve C^4. Berührt C_1^2 eine der Hauptgeraden a_1, b_1, c_1, so entspricht diesem Berührungspunkte ein Rückkehrpunkt von C^4 im entsprechenden Hauptpunkte A, B, C, denn wenn das Stück s_1 von C_1^2 gleich Null wird (Fig. 3), so verschwindet damit auch gleichzeitig das entsprechende Stück s von C^4.

Die Enveloppe der Schaar ähnlicher Kegelschnitte,

welche dem Dreiecke A B C umschrieben sind, ist daher für jede Gattung des Kegelschnitts eine bestimmte Curve vierter Ordnung, welche die Eckpunkte des Dreiecks zu Doppelpunkten hat. Ist das Dreieck gleichschenklig, so besteht die Curve C^4 aus zwei symmetrischen Theilen, und ist dasselbe gleichseitig, aus drei symmetrisch-kongruenten Theilen.

Die drei Tangentenpaare der Curve C^4 in ihren Doppelpunkten kann man leicht konstruiren, da z. B. jedem Strahle von A ein Strahl von A_1 entspricht, und die Strahlenbüschel A und A_1 sich auf g perspectivisch schneiden; man braucht nur die zwei Schnittpunkte von C_1^2 und a_1 mit A_1 durch Geraden zu verbinden, und die Schnittpunkte von diesen beiden Geraden und g wieder mit A; die letzten zwei Geraden sind dann die Tangenten der Curve C^4 im Punkte A. Ebenso findet man die Tangentenpaare in B und C.

Die besprochene Art der Erzeugung der Curve C^4 führt noch zu verschiedenen Eigenschaften derselben. Es ist bekannt, dass die sechs Geraden, welche die Ecken des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ mit den sechs Schnittpunkten des Kegelschnitts C_1^2 mit den Seiten a_1, b_1, c_1 dieses Dreiecks verbinden, einen Kegelschnitt berühren.[4]) Die sechs entsprechenden Geraden von Σ, welche die Tangenten der Curve C^4 in den Doppelpunkten A, B, C sind, schneiden die Seiten a, b, c ebenfalls in sechs Punkten eines Kegelschnitts, woraus folgt, dass *die drei Tangentenpaare der drei singulären Punkte der Curve C^4* ebenfalls *einen und denselben Kegelschnitt berühren.*

[4]) Salmon, a. a. O. Art. 327.

Sind die drei Doppelpunkte von C^4 Rückkehrpunkte (Spitzen), was nur möglich ist, wenn die Schaar ähnlicher Kegelschnitte aus Hyperbeln besteht, wie später gezeigt werden wird, *so schneiden sich die Tangenten dieser drei Rückkehrpunkte in einem und demselben Punkte.* Denn in diesem Falle entspricht der Curve C^4 ein Kegelschnitt C_1^2, welcher die drei Seiten a_1, b_1, c_1 berührt, d. h. eine Ellipse, welche dem Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ eingeschrieben ist, und den drei Tangenten in A, B, C entsprechen die drei Verbindungslinien der Ecken A_1, B_1, C_1 mit den Berührungspunkten der eingeschriebenen Ellipse C_1^2. Nach dem Satze von Brianchon schneiden sich aber diese drei Verbindungslinien in einem Punkte, folglich schneiden sich auch die drei Tangenten der Rückkehrpnnkte A, B, C der Curve C^4 in einem und demselben Punkte.

Besteht die Schaar ähnlicher Kegelschnitte aus Ellipsen, so darf keiner der Strahlen k_1 die Hyperbel R_1 von Σ_1 treffen, welche der unendlich fernen Geraden R von Σ entspricht; dies ist aber nur möglich, wenn C_1^2 selbst eine Hyperbel ist, welche ausserhalb R_1 liegt. Je excentrischer die Ellipsen sind, je mehr sich also ihre Gestalt von derjenigen des Kreises k^0 entfernt, desto mehr entfernen sich dann auch die Aeste der Hyperbel C_1^2 von der Geraden k_1^0, d. h. um so spitzer wird ihr Asymptotenwinkel, und C_1^2 nähert sich immer mehr der Curve R_1. Für den Fall der Ellipse kann also C_1^2 keine der Seiten a_1, b_1, c_1 des Hauptdreiecks von Σ_1 berühren, d. h. *die Curve C^4, welche eine Schaar ähnlicher Ellipsen umhüllt, die dem Dreiecke $A B C$ umschrieben sind, kann in den Eckpunkten dieses Dreiecks keine Spitzen haben.* Auch kann sie keine

unendlich fernen Punkte haben, da C_1^2 und R_1 sich nicht schneiden; *sie ist* folglich *eine geschlossene Curve.*

Je nachdem der Kegelschnitt C_1^2 eine der Hauptgeraden von Σ_1, z. B. a_1 in zwei nicht reellen oder in zwei reellen Punkten schneidet, hat die Curve C^4 im entsprechenden Hauptpunkte A von Σ entweder einen isolirten Punkt, oder einen Knotenpunkt, und dasselbe gilt für die andern Seiten und die entsprechenden Eckpunkte. Bei reellen Schnittpunkten hat die Curve C^4 die Gestalt des einen oder des andern Typus in Fig. 4, je nachdem die Schnittpunkte von C_1^2 mit jeder der Seiten a_1, b_1, c_1 innerhalb oder ausserhalb der bezüglichen Ecken liegen.

Wenn die ähnlichen Kegelschnitte *Hyperbeln* sind, so muss jeder Strahl k_1 die Curve R_1 in je zwei Punkten schneiden. Die Curve C_1^2 selbst kann in diesem Falle ein beliebiger Kegelschnitt sein, welcher die Curve R_1 i. A. in vier Punkten schneidet, woraus folgt, dass in diesem Falle die Curve C^4 i. A. vier Punkte im Unendlichen hat. Je nachdem die vier Schnittpunkte von C_1^2 und R_1 paarweise reell oder imaginär sind, wobei dieselben auch paarweise zusammenfallen können, ergiebt sich, dass *die Umhüllungscurve C^4 einer Schaar ähnlicher Hyperbeln, welche dem Dreiecke ABC umschrieben sind, vier oder weniger unendlich ferne Punkte haben kann, oder auch gar keinen.*

Ein dem Dreiecke $A_1B_1C_1$ umschriebener Kegelschnitt ist durch einen vierten Punkt der Ebene Σ_1 und die Tangente in diesem Punkte bestimmt, daher kann durch jeden Schnittpunkt von C_1^2 und R_1 ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher C_1^2 in diesem Punkte berührt. Dementsprechend kann *die Curve C^4 entweder vier, oder zwei,*

oder gar keine Asymptote haben, oder auch zwei Asymptoten im Endlichen und die unendlich ferne Gerade als Asymptote, oder schliesslich nur die unendlich ferne Gerade als Asymptote, und zwar in einem oder in zwei Punkten.

Da für den Fall einer Schaar ähnlicher Hyperbeln die Curve C_1^2 ein ganz beliebiger Kegelschnitt sein kann, so kann C_1^2 entweder keine der Seiten a_1, b_1, c_1 des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ berühren, oder eine davon, oder zwei, oder alle drei. *Die Curve C^4 kann* also in diesem Falle *in jedem der Punkte A, B, C einen Rückkehrpunkt haben,* je nach der Gestalt des Dreiecks und der demselben umschriebenen Hyperbeln. *Hat die Curve C^4 in allen drei Eckpunkten Spitzen, so hat sie keinen unendlich fernen Punkt.* Da ferner der Kegelschnitt C_1^2 jede der drei Geraden a_1, b_1, c_1 nur einmal berühren kann, so *hat die Curve C^4 in jedem der Eckpunkte höchstens einen einzigen Rückkehrpunkt.*

§ 4.

Grenzfälle.

Für die folgenden besonderen Gattungen der Kegelschnitte geht auch die sie umhüllende Curve C^4 in wesentliche Grenzfälle über.

Besteht die Schaar aus Kreisen, so fallen dieselben alle zusammen; alle Strahlen k_1 fallen folglich mit der Geraden k_1^0 zusammen, d. h. die Curve C_1^2 reducirt sich auf die Gerade k_1^0, und *dementsprechend reducirt sich auch die Curve C^4 auf den Kreis k^0, der dem Dreiecke umschrieben ist.*

Gehen die ähnlichen Kegelschnitte in Parabeln über, so müssen die sämmtlichen Strahlen k_1 die Curve R_1 be-

führen, d. h. C_1^2 fällt dann mit R_1 zusammen. *Die Enveloppe einer Schaar Parabeln, welche dem Dreiecke A B C umschrieben sind, ist* daher *die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ dieses Dreiecks.*

Für den Fall, dass die Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln sind, ergiebt sich Folgendes.

Eine gleichseitige Hyperbel ist durch vier Punkte bestimmt, folglich ist jede, die dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben ist, durch einen vierten Punkt P bestimmt; dies geht auch daraus hervor, dass in einem Kegelschnittbüschel von vier Punkten sich nur eine einzige gleichseitige Hyperbel befindet (§ 1). Besteht also die Schaar aus gleichseitigen Hyperbeln, so fallen die beiden durch P gehenden ähnlichen Kegelschnitte zusammen, folglich auch die beiden demselben entsprechenden und durch P_1 gehenden Strahlen k_1 und k_1'. Dieser Doppelstrahl ist vollkommen bestimmt durch den Punkt P_1, da die ihm entsprechende gleichseitige Hyperbel bestimmt ist durch P, also durch jeden Punkt des Kreises k^2 nur eine einzige gleichseitige Hyperbel geht.

Durchläuft P den Kreis k^2, so beschreibt der zweite Schnittpunkt (ausser A) der gleichseitigen Hyperbel mit g auf dieser Geraden eine zu k^2 projektivische Punktreihe, während gleichzeitig P_1 auf k_1^2 eine zu k^2 und g projektivische Punktreihe durchläuft. Der Schnittpunkt K^2 von k_1^2 und g entspricht sich selbst, folglich haben die projectivischen Punktreihen g und k_1^2 perspectivische Lage, d. h. die Verbindungslinien der homologen Punkte gehen sämmtlich durch einen und denselben Punkt H_1.

Diese Verbindungslinien aber entsprechen den gleich-

seitigen Hyperbeln von Σ, d. h. der Strahlenbüschel H_1 entspricht der Schaar gleichseitiger Hyperbeln, welche dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben sind, folglich gehen alle diese gleichseitigen Hyperbeln durch einen und denselben Punkt und bilden einen Büschel mit den Basispunkten A, B, C, H.

Zu diesem Büschel gehören aber auch die drei Seitenpaare des vollständigen Vierseits $A\,B\,C\,H$, und diese Seitenpaare müssen demnach aufeinander senkrecht stehen. Drei der Seiten dieses Vierseits sind die Seiten a, b, c des Dreiecks: die drei andern Seiten sind desshalb die zugehörigen Höhen, und der vierte Basispunkt H des Büschels ist daher der Höhendurchschnittspunkt des Dreiecks $A\,B\,C$. *Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreiecke umschrieben werden können, gehen* folglich *durch den Höhenpunkt desselben, und die Umhüllungscurve C^3 dieser Schaar gleichseitiger Hyperbeln reducirt sich* daher *auf diesen Punkt.*[5])

§ 5.

Weitere Eigenschaften der Schaar und ihrer Enveloppe.

Durch jeden Punkt P des dem Dreiecke umschriebenen Kreises k^0 gehen zwei der Kegelschnitte der Schaar, somit gehen auch durch jeden Punkt P_1 des Strahles k_1^0 zwei der Strahlen k_1, k_1'. Dadurch werden die Berührungspunkte P_1', P_1'' von k_1 und k_1' mit dem Kegelschnitte C_1^2

[5]) Vgl. Brianchon und Poncelet, in den Annales de Gergonne, XI, pag. 205, und Schröter-Steiner, Theorie der Kegelschnitte, II, pag. 233.

einander paarweise zugeordnet; die Verbindungslinien dieser Paare von Berührungspunkten P_1', P_1'' gehen alle durch denselben Punkt, nämlich durch den Pol H_1' der Geraden k_1^0 bezüglich der Curve C_1^2. Durch den Strahlenbüschel H_1' werden g und k_1^0 perspectivisch geschnitten, ebenso durch den Strahlenbüschel H_1, welcher dem Büschel gleichseitiger Hyperbeln von Σ entspricht. Dieser Hyperbelbüschel und der Strahlenbüschel H_1 schneiden sich aber perspectivisch auf g, und ferner schneiden sich die Strahlenbüschel H_1 und H_1' perspectivisch auf k_1^0, folglich ist H_1' projectivisch zum Büschel gleichseitiger Hyperbeln und zu g. Da nun k^0, g und k_1^0 projectivisch sind, und die homologen Punktepaare von k^0 und g jedesmal durch eine gleichseitige Hyperbel miteinander verbunden sind, so sind dementsprechend die homologen Punktepaare von g und k_1^0 jedesmal durch eine Gerade miteinander verbunden; alle diese Geraden gehören aber dem Strahlenbüschel H_1' an. Jeder Strahl dieses Büschels trifft auf g eine gleichseitige Hyperbel, d. h. der Strahlenbüschel H_1' und der Hyperbelbüschel H schneiden sich perspectivisch auf g. Da aber sowohl H_1 als auch H_1' perspectivisch sind zu g und zu k_1^0, so sind H_1 und H_1' identisch, d. h. die Berührungspunkte P_1', P_1'' zweier durch denselben Punkt P_1 von k_1^0 gehenden Tangenten k_1, k_1' an den Kegelschnitt C_1^2 liegen jedesmal auf einem Strahle des Büschels H_1, welcher dem dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschriebenen Büschel von gleichseitigen Hyperbeln entspricht. Dementsprechend folgt, dass *die zwei Punkte, in welchen die beiden durch denselben Punkt P des Kreises k^0 gehenden Kegelschnitte der Schaar von der Curve C^4 berührt werden, allemal auf*

einer gleichseitigen Hyperbel liegen, welche dem Dreiecke A B C umschrieben ist.

Ausserdem sind auf jedem Strahle des Büschels H_1 der Punkt H_1 und der Schnittpunkt des Strahles mit k_1^0 harmonisch getrennt durch die beiden Schnittpunkte P_1', P_1'' des Strahles mit dem Kegelschnitt C_1^2, und so sind auch *der Höhenpunkt H und der Schnittpunkt der jedesmaligen gleichseitigen Hyperbel des Büschels mit dem Kreise k^0 harmonisch getrennt durch die beiden ausser den singulären Punkten A, B, C noch vorhandenen Schnittpunkte der Hyperbel mit jeder Curve C^n*, welche die Enveloppe einer bestimmten Gattung ähnlicher Kegelschnitte ist, die dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben sind.

Während nun P auf k^0 und damit auch P_1 auf k_1^0 fortrückt, beschreibt das Strahlenpaar k_1, k_1' einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der den Kegelschnitt C_1^2 umhüllt.

Sei t' die Tangente an den Kegelschnitt k im Endpunkte E desjenigen Durchmessers d von k, dessen anderer Endpunkt P ist; dieser Tangente entspricht in Σ_1 ein Kegelschnitt t_1', welcher den Strahl k_1 in einem Punkte E_1 berührt, und welcher dem Dreiecke $A_1B_1C_1$ umschrieben ist, so beschreibt der Berührungspunkt E_1 einen Kegelschnitt C_1', welcher von dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung k_1 umhüllt wird, d. h. der Punkt E beschreibt dementsprechend eine Curve C' vierter Ordnung, welche von der Kegelschnittschaar k umhüllt wird. Der Strahlenbüschel k_1 kann aber nur den Kegelschnitt C_1^2 umhüllen, somit sind auch die Curven C' und C^4 identisch. Die Punkte E_1 und P_1' fallen daher zusammen, und damit auch E und P'. Es folgt, dass *derjenige Punkt, in welchem*

jeder Kegelschnitt k der Schaar von der Curve C^4 berührt wird, und derjenige Punkt, in welchem er den Kreis k^0 zum vierten Male schneidet, ausser A, B, C, allemal Endpunkte eines und desselben Durchmessers des Kegelschnitts sind.

§ 6.

Ort der Mittelpunkte und Brennpunkte der Schaar (Aufgabe von Steiner).

Sei M der Mittelpunkt eines Durchmessers $d = PP'$ des Kegelschnitts k. Dem Durchmesser d entspricht in Σ_1 ein Kegelschnitt d_1, der dem Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ umschrieben ist, und auf welchem sich der dem Punkte M entsprechende Punkt M_1 befindet.

Beschreibt k die Schaar, so ändert sich der Durchmesser d und damit auch der Kegelschnitt d_1, der demselben entspricht, und während M auf dem veränderlichen Durchmesser d hingleitet, beschreibt M_1 den veränderlichen Kegelschnitt d_1. Da beides gleichzeitig geschieht, so ergiebt sich als Ort des Punktes M_1 eine Curve vierter Ordnung, welche die drei Punkte A_1, B_1, C_1 zu Doppelpunkten hat, denn der Punkt M_1 geht zweimal durch jeden dieser Punkte.

Dementsprechend ergiebt sich in der Ebene Σ, dass *der Ort der Mittelpunkte der Schaar ähnlicher Kegelschnitte, die dem Dreiecke $A B C$ umschrieben sind, ein Kegelschnitt ist, der die drei Seiten des Dreiecks $A B C$ in je zwei Punkten schneidet.*

Für den Ort der Brennpunkte derselben ergiebt sich Folgendes.

In einer Schaar coaxialer und homothetischer Kegelschnitte beschreibt ein Brennpunkt F eine zur Schaar projectivische gerade Punktreihe, deren Träger die Hauptaxe der Schaar ist. Dieser Punktreihe erster Ordnung entspricht in Σ_1 eine zu ihr projectivische Punktreihe zweiter Ordnung, welche dem Hauptdreiecke $A_1 B_1 C_1$ umschrieben ist. Die Kegelschnitte k, k_1 etc. sind aber nicht coaxial und homothetisch, sondern sie bilden die Schaar, welcher in Σ_1 der Strahlenbüschel zweiter Ordnung k_1, k_1' etc. entspricht, der den Kegelschnitt C_1^2 umhüllt. Dieser Strahlenbüschel ist projectivisch zur Schaar und desshalb auch zu der Punktreihe zweiter Ordnung von Σ_1, welche durch den dem Brennpunkte F entsprechenden Punkt F_1 beschrieben würde, wenn die Kegelschnitte der Schaar coaxial und homothetisch wären. Aber gleichzeitig mit der Hauptaxe von k ändert sich auch der ihr entsprechende Kegelschnitt k_1, und während F auf dieser Hauptaxe fortgleitet, beschreibt dieselbe einen zur Schaar k', k'' etc. und daher auch zum Strahlenbüschel zweiter Ordnung k_1, k_1' projectivischen Strahlenbüschel; gleichzeitig durchläuft F_1 den veränderlichen Kegelschnitt, der die Schaar k_1, k_1' etc. beschreibt.

Es ergiebt sich daher als Ort der Punkte F_1 eine Curve vierter Ordnung, welche die drei Hauptpunkte A_1, B_1, C_1 zu Doppelpunkten hat, und welcher in Σ *ein Kegelschnitt* entspricht, *der die Seiten des Dreiecks ABC i. A. in je zwei Punkten schneidet, als Ort der Brennpunkte F.*

Für den zweiten Brennpunkt F' hat man dieselbe Betrachtung.

Da F und F' jedesmal gleich weit entfernt sind vom Mittelpunkt des betreffenden Kegelschnitts, so *bilden die Orte der Mittelpunkte und der Brennpunkte der Schaar ähnlicher Kegelschnitte, die einem Dreiecke umschrieben sind, ein besonderes System von drei Kegelschnitten, welche in der Weise von einander abhängig sind, dass man durch einen beliebigen Punkt des einen Kegelschnitts eine Gerade immer so legen kann, dass sie von den beiden andern Kegelschnitten in aequidistanten Punkten geschnitten wird.* Die *Brennpunktscurven* können daher in diesem Sinne als *symmetrisch* oder *invers* zu einander *in Bezug auf die Mittelpunktscurve* bezeichnet werden.

§ 7.

Grenzfälle der Mittelpunktscurve.

Für die Mittelpunktscurve giebt es einige interessante Grenzfälle.

Sind die ähnlichen Kegelschnitte *Kreise*, so fallen alle zusammen mit dem Kreise k^0, der dem Dreiecke umschrieben ist, und *die genannten Oerter reduciren sich auf den Mittelpunkt* dieses Kreises.

Bei der Parabel ist der Mittelpunkt unendlich entfernt, d. h. der entsprechende Punkt M_1 bewegt sich auf der Hyperbel R_1; *der Ort der Mittelpunkte aller dem Dreiecke umschriebenen Parabeln ist* daher *die Gerade im Unendlichen.* Der Ort des Brennpunktes ist ein Kegelschnitt, der die drei Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ in je zwei Punkten schneidet.

Besteht die Schaar aus *gleichseitigen Hyperbeln*, so bilden dieselben, wie oben gezeigt wurde, einen Büschel,

dessen vierter Basispunkt der Höhendurchschnittspunkt des Dreiecks ist, und zu diesem Büschel gehören auch die drei zu einander rechtwinkligen Seitenpaare des Vierseits $A\,B\,C\,H$. Da jedes dieser rechtwinkligen Strahlenpaare als gleichseitige Hyperbel aufzufassen ist, so liegen folglich die Fusspunkte H_a, H_b, H_c der drei Höhen des Dreiecks $A\,B\,C$ auf dem Orte der Mittelpunkte der dem Dreiecke umschriebenen Schaar gleichseitiger Hyperbeln.

Nun ist das *Diagonaldreieck* $H_a\,H_b\,H_c$ eines einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks $A\,B\,C$ immer ein Poldreieck des Kegelschnitts[6]); da aber alle gleichseitigen Hyperbeln des Büschels dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben sind, so folgt, dass $H_a\,H_b\,H_c$ *ein Poldreieck aller Hyperbeln des Büschels* ist.

Denkt man sich an einen Kegelschnitt alle Paare zu einander rechtwinkliger Tangenten gelegt, so ist der Ort der Schnittpunkte dieser Tangentenpaare ein mit dem Kegelschnitte concentrischer Kreis. Nur bei der Parabel geht dieser Kreis in eine Gerade über, und bei der gleichseitigen Hyperbel reducirt er sich auf einen Punkt, nämlich auf den Mittelpunkt derselben[7]). Die gleichseitige Hyperbel hat daher nur ein einziges Paar zu einander rechtwinkliger Tangenten, nämlich ihre Asymptoten. Aber der Ortskreis des Schnittpunkts der rechtwinkligen Tangentenpaare eines Kegelschnitts schneidet jeden einem beliebigen Poldreiecke des Kegelschnitts umschriebenen Kreis rechtwinklig[8]), folglich muss, da sich

[6]) Reye, Geometrie der Lage I, pag. 81.
[7]) Schröter-Steiner, a. a. O. § 34.
[8]) Ibid.

dieser Ortskreis bei der gleichseitigen Hyperbel auf ihren Mittelpunkt reducirt, der Mittelpunkt einer jeden gleichseitigen Hyperbel, welche dem Vierecke $A\,B\,C\,H$ oder aber dem Dreiecke $A\,B\,C$ umschrieben ist, auf dem Kreise liegen, der durch die Fusspunkte H_a, H_b, H_c der drei Höhen des Dreiecks $A\,B\,C$ bestimmt ist, und welcher unter Anderen auch durch die Mittelpunkte der drei Seiten geht; derselbe ist bekannt als *Kreis der zwölf Punkte*[9]) oder *Feuerbach'scher Kreis* des Dreiecks.

Der Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreiecke umschrieben sind, ist also *der Feuerbach'sche Kreis dieses Dreiecks.*

[9]) Steiner, die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, pag. 53.

Tafel I

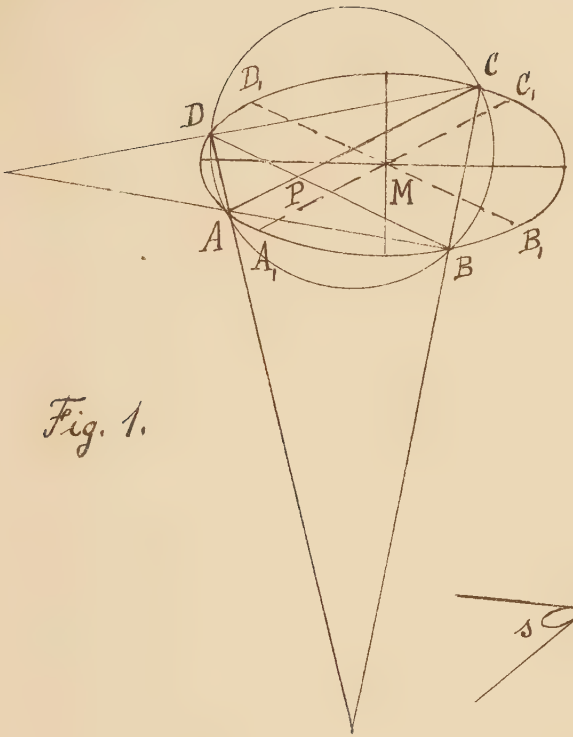


Fig. 1.

Fig. 3.

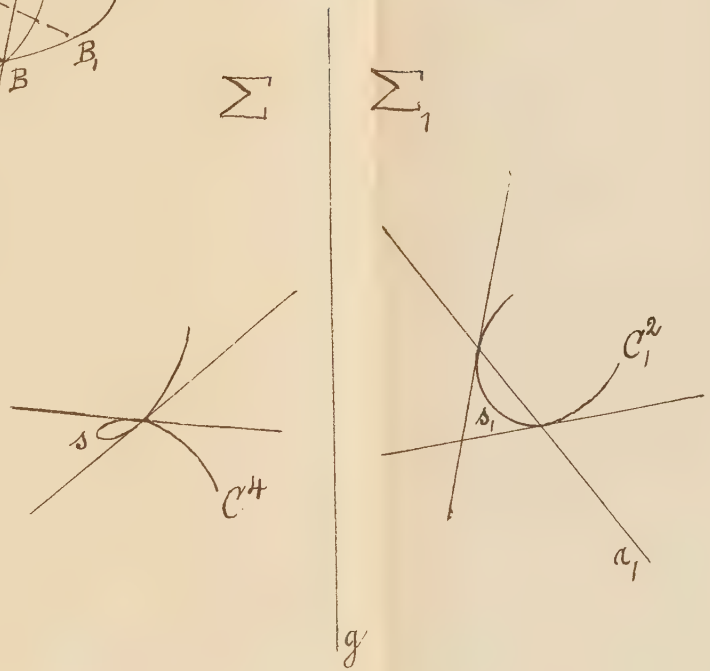


Fig. 4.

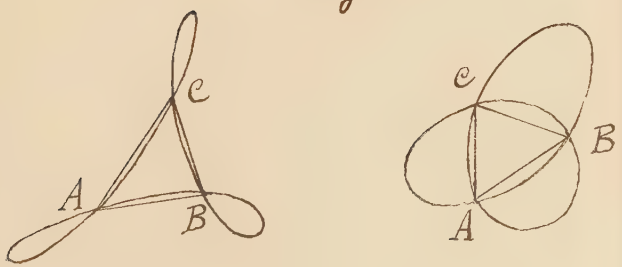
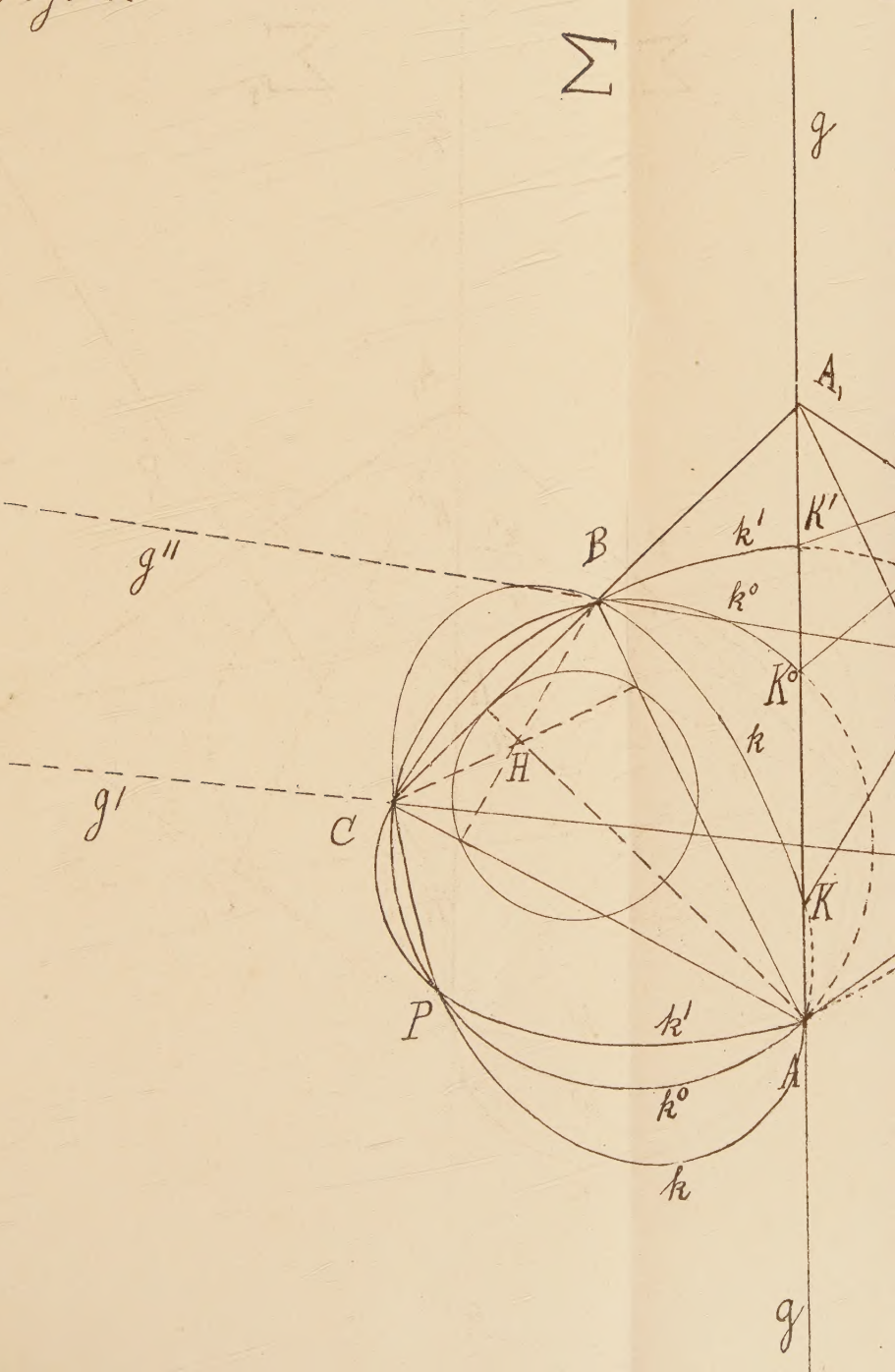
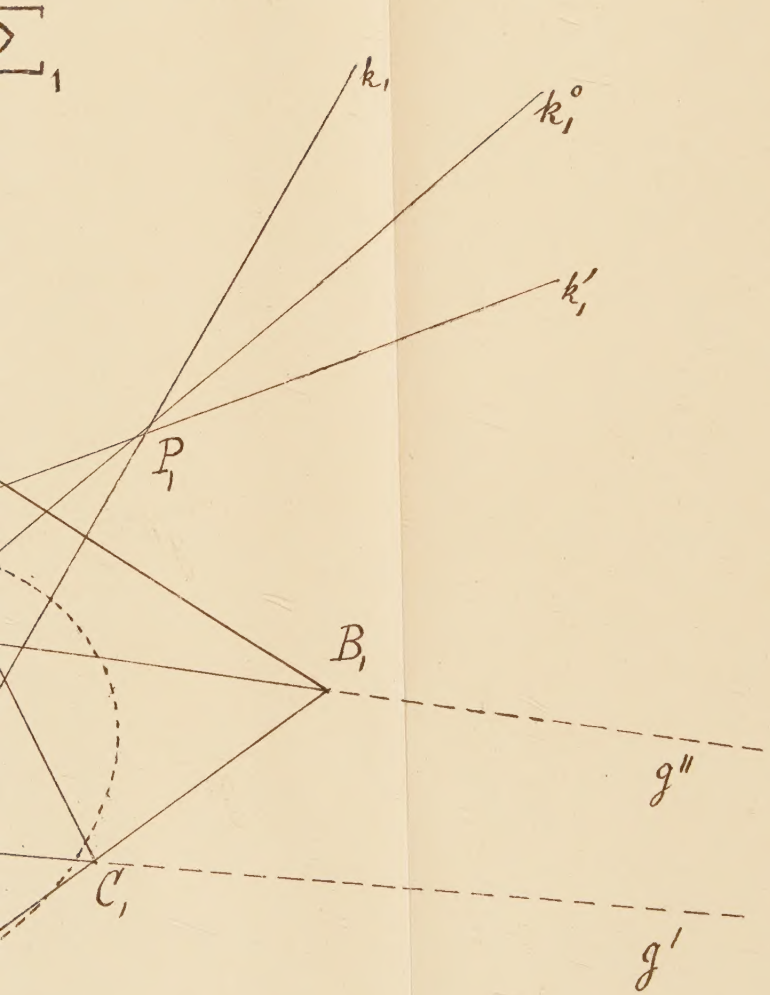


Fig. 2.




Σ_1
k_1
k_1°
k_1'
P_1
B_1
g''
C_1
g'